Polo Olímpico de Treinamento Intensivo UFPR
Curso de Combinatória, Nível 3
2º semestre de 2018

Vitor Emanuel Gulisz

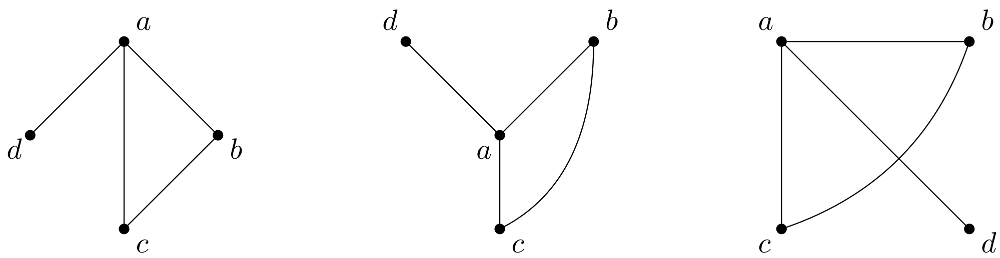
Grafos: Introdução

Definição 1. *Um **grafo**[1] é um par $G = (V, A)$, onde $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto finito e não vazio e $A \subset \{\{v_i, v_j\} : v_i, v_j \in V$ com $i \neq j\}$. Os elementos de V são os **vértices** do grafo G e os elementos de A são as **arestas** de G.*

Se $G = (V, A)$ é um grafo e u e v são dois de seus vértices, diremos que u e v são **adjacentes** se $\{u, v\} \subset A$. Ou seja, se há uma aresta ligando u e v.

É conveniente representar um grafo por um diagrama, onde os vértices correspondem a pontos no plano e as arestas correspondem a linhas que ligam os seus respectivos vértices.

Exemplo 2. Considere $G = (V, A)$, onde $V = \{a, b, c, d\}$ e $A = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}$. Veja abaixo algumas representações do grafo G:



Definição 3. *Dado um grafo $G = (V, A)$ e $v \in V$, o **grau** de v, denotado por $g(v)$, é o número de arestas adjacentes a v.*

Teorema 4. *Em um grafo $G = (V, A)$ a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas. Em símbolos:*

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|A|.$$

Demonstração. Em cada vértice v temos $g(v)$ arestas ligadas a v. Note que se somarmos os graus dos vértices, obtemos o número de arestas multiplicado por dois, pois contamos cada aresta duas vezes (se uma aresta liga os vértices u e v, ao somarmos $g(u)$ com $g(v)$, a aresta é contada duas vezes, uma vez em $g(u)$ e outra em $g(v)$). □

$\boxed{\text{Problemas recomendados: 1, 3 e 5}}$

Sugerimos que antes de prosseguir a leitura do texto, tente resolver os problemas recomendados acima.

Pronto? Então vamos lá!

Definição 5. *Um **passeio** em um grafo G é uma sequência $\mathcal{P} = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ de vértices (não necessariamente distintos) de G, tal que u_i é adjacente a u_{i+1} para $1 \leq i \leq k-1$. Um passeio $\mathcal{P}$ como acima é **fechado** se $u_1 = u_k$.*

[1] Na verdade, esta é a definição de grafo *simples*. Porém, como iremos considerar apenas grafos simples, você não precisa se preocupar com isto.

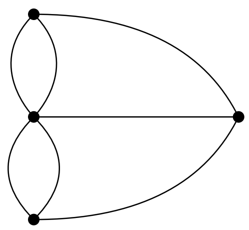
Definição 6. *Um grafo é **conexo** se existir um passeio entre dois quaisquer de seus vértices.*

Definição 7. *Um **passeio Euleriano** em um grafo conexo é um passeio fechado que usa cada aresta do grafo exatamente uma vez. Um grafo conexo é **Euleriano** se contiver um passeio Euleriano.*

Teorema 8. *Um grafo conexo e não trivial* [2] *é Euleriano se, e só se, todos os seus vértices têm grau par.*

Exemplo 9 (Pontes de Königsberg)**.** O teorema anterior, provado por Euler em 1735, marca o nascimento da Teoria dos Grafos. Naquela época, a cidade de Königsberg era cortada por um rio, que dava origem a algumas ilhas. Assim, para facilitar o descolamento pela cidade, haviam algumas pontes ligando estas ilhas. Aconteceu que as pessoas começaram a se perguntar se seria possível sair de algum lugar da cidade, passar por cada ponte uma única vez e voltar para o lugar inicial.

Euler modelou este problema representando cada ilha e margem por um vértice, e cada ponte por uma aresta. Assim, ele obteve o seguinte grafo:

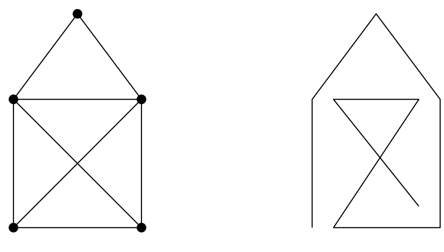


Note que este grafo possui apenas vértices de grau ímpar. Pelo teorema acima segue que o grafo não é Euleriano, e logo não é possível passar por cada ponte uma única vez e voltar para o ponto de partida.[3]

Definição 10. *Um **passeio semi-Euleriano** em um grafo conexo G é um passeio que começa e termina em vértices distintos de G e atravessa cada aresta de G uma única vez.*

Teorema 11. *Um grafo conexo G possui um passeio semi-Euleriano se, e só se, G possui exatamente dois vértices de graus ímpares.*

Exemplo 12. Veja que o grafo abaixo possui exatamente dois vértices de graus ímpares. Logo possui um passeio semi-Euleriano, pelo teorema acima. Ou seja, podemos desenhar este grafo sem tirar o lápis do papel! Veja abaixo como podemos fazer isso.



Exemplo 13. Um grafo conexo pode ser desenhado sem levantar o lápis do papel, de modo que cada aresta é desenhada exatamente uma vez se, e só se, possui no máximo dois vértices de grau ímpar.

[2] Um grafo é trivial se não possui arestas. Logo um grafo não trivial possui pelo menos uma aresta.

[3] Veja que neste exemplo utilizamos um grafo com mais de uma aresta ligando dois vértices. A princípio esta configuração não faz parte da nossa definição de grafo, mas não se preocupe, o Teorema 8 continua valendo para grafos deste tipo.

Definição 14. *Um **ciclo** em um grafo G é um passeio fechado $(u_1, u_2, \ldots, u_k, u_1)$ em G tal que os vértices $u_1, u_2, \ldots, u_k$ são todos distintos.*

Definição 15. *Um **ciclo Hamiltoniano** em um grafo é um ciclo que passa por todos os vértices do grafo. Um grafo conexo é **Hamiltoniano** se contiver um ciclo Hamiltoniano.*

Teorema 16. *Se $G = (V, A)$ é um grafo com $|V| \geq 3$ e tal que $\delta(G) \geq \frac{|V|}{2}$, então G é Hamiltoniano.*

No teorema acima, $\delta(G)$ é o **grau mínimo** de G e é definido por $\delta(G) = min\{g(v) : v \in V\}$.

Problemas recomendados: 8 e 9

Problemas

Comentário sobre os problemas 3 e 5:

Estes problemas são descritos em linguagem de grafos, o que os torna mais abstratos. Para que você veja como esses problemas podem ser aplicados na vida real, vamos dar a eles enunciados equivalentes. Para isso, considere uma festa com algumas pessoas. Ao longo desta festa, algumas pessoas se cumprimentaram (deram apertos de mãos). Para estudar estes apertos de mãos, vamos construir um grafo! Neste grafo, cada vértice corresponde a uma pessoa, e ligamos duas pessoas se elas se cumprimentaram. É claro que estamos supondo que ninguém cumprimentou a si mesmo, e ninguém cumprimentou alguém mais de uma vez.

Assim, para estes problemas apresentaremos uma versão alternativa para o seu enunciado (indicada com um asterisco). Por exemplo, o problema *3 é a versão alternativa (equivalente) do problema 3.

1. Figurativo é um país com nove cidades de nomes $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Um viajante descobre que existe vôo direto de uma cidade a outra se, e somente se, o número de dois algarismos formado pelos nomes das cidades é divisível por 3. O viajante pode ir da Cidade 1 para a Cidade 9?

2. Um determinado reinado tem 100 cidades e saem quatro estradas de cada uma delas. Quantas estradas existem ao todo neste reinado?

3. Prove que em um grafo qualquer, o número de vértices de grau ímpar é par.

*3. Prove que em uma festa, o número de pessoas que cumprimentaram um número ímpar de pessoas é par.

4. Uma turma tem 30 alunos. É possível que nove deles tenham 3 amigos cada (na turma), onze tenham 4 amigos e dez tenham 5 amigos?

5. Prove que em um grafo com pelo menos dois vértices, existem dois vértices com o mesmo grau.

*5. Prove que em uma festa com pelo menos duas pessoas, existem duas pessoas que apertaram o mesmo número de mãos.

6. Cada um dos 102 estudantes é amigo de pelo menos 68 outros alunos. Prove que existem quatro estudantes com o mesmo número de amigos.

7. Prove que é impossível dispor os números $1, 2, 3, \ldots, 13$ ao redor de um círculo de modo tal que, para dois números vizinhos quaisquer x e y, tenhamos $3 \leq |x - y| \leq 5$.

8. Cem circunferências formam uma figura conexa no plano. Prove que esta figura pode ser desenhada sem se tirar o lápis do papel ou desenhar qualquer parte de qualquer um dos círculos mais de uma vez.

9. É possível desenhar um tabuleiro 2018×2018 sem passar por uma linha mais de uma vez, e sem retirar o lápis do papel?

10. É possível desenhar 9 segmentos de reta no plano de tal forma que cada um intersecta exatamente 3 outros?

11. Cinquenta cientistas estão participando de uma conferência e cada um deles conhece pelo menos 25 dos outros (se A conhece B então B conhece A). Prove que:

    (a) Existem quatro deles que podem se sentar a uma mesa redonda tendo, cada um deles, dois conhecidos como vizinhos.

    (b) Os cinquenta cientistas podem se sentar a uma mesa redonda de modo que cada um deles tenha dois conhecidos como vizinhos.

Bibliografia

1. Antonio Caminha Muniz Neto, *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 4, Combinatória.* SBM, 2016.

2. Bruno Holanda, *Aula 10, Curso de Combinatória - Nível 2, Programa Olímpico de Treinamento.* Disponível na Internet.

3. Carlos Shine, *Aula 9, Curso de Combinatória - Nível 3, Programa Olímpico de Treinamento.* Disponível na Internet.

4. Dmitri Fomin, Sergey Genkin, Ilia Itenberg, *Círculos Matemáticos, A Experiência Russa.* IMPA, 2012.

Antes de ver a solução de um problema tente passar um bom tempo tentando resolver ele! Só assim você poderá apreciar sua solução e aprender com ela.

Respostas, Dicas e Soluções

1. Lembre do critério de divisibilidade por 3 e verifique que podemos construir um grafo que represente as conexões entre as cidades. Desenhe este grafo e veja que não é possível ir da Cidade 1 para a Cidade 9.

2. 200. Basta montar o grafo correspondente ao problema, onde os vértices são as cidades e as arestas correspondem às estradas que ligam as cidades, e aplicar o Teorema 4.

3. Use o Teorema 4 e separe a soma dos graus em duas partes: soma dos graus ímpares e soma dos graus pares. Agora utilize argumentos de paridade para concluir o problema.

4. Não. Se montarmos o grafo correspondente, onde os vértices são os alunos e as arestas ligam alunos que são amigos, então teríamos um grafo com 19 vértices ímpares, o que não pode ocorrer, como foi visto no problema 3.

5. Considere as possibilidades para os graus dos vértices, estude o caso em que algum dos graus é zero e aplique o Princípio da Casa dos Pombos.

6. Temos 34 possibilidades para os graus dos vértices: $68, 69, \ldots, 101$. Verifique que não pode ocorrer o caso em que as 34 possibilidades ocorrem exatamente 3 vezes, devido ao Teorema 4. Agora aplique o Princípio da Casa dos Pombos.

7. Suponha, por absurdo, que seja possível. Monte um grafo cujos vértices são os números e cujas arestas ligam números vizinhos no círculo. Temos então um grafo com 13 vértices e 13 arestas, em que cada vértice tem grau 2. Considere os conjuntos de vértices $A = \{1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Podemos ter no máximo duas arestas ligando pares de elementos de A: uma ligando 1 e 4 e outra ligando 10 e 13. Assim, todas as outras arestas devem ligar elementos de A com elementos de B, ou elementos de B com elementos de B. Portanto, existem pelo menos 11 arestas que saem de vértices de B. Mas B tem cinco elementos, logo pelo princípio da casa dos pombos existe algum vértice em B que tem grau maior ou igual a 3, o que é contradição, pois todos os vértices tem grau 2. Assim provamos o resultado por contradição.

8. O grafo formado pelas circunferências (os pontos de interseção são seus vértices e os arcos das circunferências são suas arestas) é conexo e os graus de todos os seus vértices são pares. O resultado segue do Teorema 8.

9. Não. Pense no tabuleiro como um grafo, onde os vértices são as interseções de linhas e as arestas são as linhas que ligam estas interseções. Note que nas bordas do tabuleiro há muitos vértices de graus ímpares, assim o resultado segue do Exemplo 13.

10. Não. Considerar os segmentos de retas como arestas de um grafo torna o problema muito complicado, pois há muitos modos que os segmentos de retas podem se intersectar. Então, vamos fazer diferente. Consideramos um grafo onde os segmentos de reta são representados por vértices e dois vértices estão ligados por uma aresta se, e só se, os segmentos de retas correspondentes se intersectam. Então este grafo tem nove vértices de grau 3, o que é impossível, como já vimos no problema 3.

11. Primeiro montamos um grafo onde os vértices correspondem aos cientistas, e dois vértices estão ligados se, e só se, os cientistas correspondentes se conhecem.

    (a) Vamos considerar dois casos: se todos os cientistas conhecem todos os outros, então basta escolher quaisquer quatro cientistas. Agora, se isso não ocorre, então existem dois cientistas A e B que não se conhecem. Usando o princípio da casa dos pombos podemos mostrar que existe um cientista C que conhece A e B. Agora, novamente pelo princípio da casa dos pombos, podemos mostrar que existe um cientista D que conhece A e B, e assim resolvemos o problema.

    (b) Primeiro verificamos que este grafo é conexo. Agora, como o grau mínimo deste grafo é maior ou igual a 25, segue do Teorema 16 que este grafo é Hamiltoniano, ou seja, possui um ciclo Hamiltoniano. Portanto, basta dispor os cientistas ao longo da mesa seguindo a ordem deste ciclo Hamiltoniano.